

Eyler funksiyasi, Eyler va Ferma teoremlari

Asila Faxriddin-qizi Faxriddinova

O.U.Pulatov

Samarqand davlat pedagogika instituti

Annotatsiya: Mazkur maqolada Eyler funksiyasi va Eyler hamda Ferma teoremlari yoritilgan. Xususan, funksiyasining umumiy xossalari murakkab taqqoslamalarga oid misollarda Eyler teoremlari va Ferma teoremlari yordamida tub sonlar bilan bog'liq masalalarni yechish bosqichlari batafsil bayon etilgan. Xususan Eyler funksiyasining tarifi, qiymatlarni hisoblash usullari keng yoritilgan. Eyler teoremlari va Ferma kichik teoremlarining nazariy asoslari, ularning o'zaro bog'liqligi hamda murakkab taqqoslamalarni yechishda qo'llash uchun tahlil qilingan. Maqolada ushbu teoremlar yordamida kata darajali sonlarning berilgan moduli bo'yicha qoldiqlarni aniqlash, sonlarning oxirgi raqamini topish va murakkab sonli ifodalarni soddalashtirishga doir misollar keltirilgan. Keltirilgan nazariy ma'lumotlar va misollar tafakkurni rivojlantirish hamda sonlar nazariyasiga oid masalalarni samarali yechish ko'nikmalarni shakllantirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Eyler funksiyasi, Eyler teoremlari, Ferma kichik teoremlari, sonlar nazariyasi, tub sonlar, o'zaro tub sonlar, taqqoslamalar, katta darajali sonlar

Euler's Function, Euler's Theorem, and Fermat's Theorem

Asila Fakhriddin-qizi Fakhriddinova

O.U.Pulatov

Samarkand State Pedagogical Institute

Abstract: This article examines Euler's function, as well as Euler's and Fermat's theorems. Specifically, it provides a detailed description of the general properties of Euler's function and outlines the steps for solving problems involving prime numbers - using Euler's and Fermat's theorems - within the context of complex congruences. The definition of Euler's function and methods for calculating its values are covered extensively. The theoretical foundations of Euler's theorem and Fermat's Little Theorem, along with their interrelationship, are analyzed with a focus on their application in solving complex congruences. The article presents examples demonstrating how these theorems can be used to determine the remainders of large powers modulo n , find the last digits of numbers, and simplify complex numerical expressions. The theoretical material and examples provided serve to foster analytical

thinking and develop the skills necessary to effectively solve problems in number theory.

Keywords: Euler's function, Euler's theorem, Fermat's Little Theorem, number theory, prime numbers, coprime numbers, congruences, large powers

Eyler funksiyasi berilgan natural son bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonlar sonini aniqlaydi. Eyler teoremasi va Ferma kichik teoremasi esa sonlar nazariyasiga oid masalalarni yechishda muhim nazariya asos hisoblanadi. Ushbu teoremlar nafaqat matematik hisoblashlarda, balki zamonaviy kriptografiya va axborot xavfsizligi sohalarida ham qo'llaniladi. Maqolaning maqsadi-Eyler funksiyasining asosiy xossalarni o'rganish, Eyler va Ferma teoremlarining mohiyatini yoritish hamda ularni murakkab taqqoslamalarni yechishda qo'llash usullarini misollar orqali tushuntirishdan iborat. Mavzuni o'rganish matematik tafakkurni rivojlantirish, hisoblash ko'nikmalarini mustahkamlash va sonlar nazariyasiga oid masalalarni samarali yechishga yordam beradi.¹

Fermaning kichik teoremasi. Ta'rif va formula. Agar p tub son bo'lsa va a soni p ga bo'linmasa (a, p)=1, u holda, a ning $(p-1)$ - darajasi p ga bo'lganda 1 qoldiq qoldiradi:

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ Bundan kelib chiqadigan yana bir foydali xususiyat (ixtiyoriy butun a uchun): $a^p \equiv a \pmod{p}$. Eyler teoremasi. Eyler teoremasi Fermaning kichik teoremasining ixtiyoriy (tub bo'lmagan) natural sonlarga keltirilgan ko'rinishidir.

Ta'rif va formula. Agar a va n o'zaro tub sonlar bo'lsa (a, n)=1, u holda:

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ Bu yerda $\varphi(n)$ – Eyler funksiyasi bo'lib, 1 dan n gacha bo'lgan va n bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonni bildiradi. Agar $n=p$ (tub son) bo'lsa, $\varphi(p)=p-1$ bo'ladi va Eyler teoremasi aynan Fermaning kichik teoremasiga aylanadi.

Quyida ushbu teoremlarning haqiqiy kuchini ko'rsatadigan ikkita murakkabroq va qiziqarli misollarni korib chiqamiz.

Darajalar minorasi va Fermaning kichik teoremasi.

$2^{2027^{2028}}$ sonini 13ga bo'lgandagi qoldig'ini toping.

Yechish: Modulini aniqlash $p=13$ - tub son. Fermaning kichik teoremasiga kora, agar ($a, 13$)=1 ligidan $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ ekanligi ma'lum.

Darajani soddalashtirish: demak, asosiy sonning darajasi 12ga bo'linadigan qoldiqni topishimiz kerak, ya'ni $\frac{2027^{2028}}{\text{mod } 12}$ ni hisoblaymiz. Bazani moduli bo'yicha kichraytirish: 2027 ni 12 ga bo'lamiz. $2027=168 \times 12 + 11$ demak $2027 \equiv 11 \equiv -1 \pmod{12}$. Bu shuni bildiradiki, ulkan darajadagi 2027^{2028} soni 12 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi ekan. Asosiy hisob-kitob buni boshlang'ich ifodaga qaytarib olib boramiz.

¹ Eyler integrallari va ularning amaliy tatbiqlari O Pulatov, Science and Education, OOO «Open science» 2026

$2^{2027^{2028}} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{13}$ qoldiq 2 ga teng.

Oxirgi uchta raqam va Eyler teoremasi.

7^{999} sonining oxirgi uchta raqamini toping (ya'ni 7^{999} ni 1000 ga bo'lgandagi qoldiqni toping). Shartni tekshirish: $\gcd(7,100)=1$ bo'lgani uchun Eyler teoremasini qo'llashimiz mumkin.

$7^{\varphi(1000)} \equiv 1 \pmod{1000}$ Eyler funksiyasini hisoblash:

$1000=10^3=2^3 \times 5^3$ bo'lgani uchun $\varphi(1000)=(1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{5})=1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}=400$

Demak $7^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$ darajani bo'lish: 999 sonini 400 ga bo'lamiz.

$999=400 \times 2 + 199$ Ifodani qisqartirish:

$7^{999}=(7^{400})^2 \times 7^{199} \equiv 1^2 \times 7^{199}=7^{199} \pmod{1000}$

Keyingi qadam: (7^{199} ni kichraytirish):

$7^4 = 2401 \equiv 401 \pmod{1000}$

Binom yoyilmasiga ko'ra: $(400 + 1)^{49} \equiv 1 + 49 \times 400 = 1 + 19600 \equiv 601 \pmod{1000}$. Oxirgi ko'paytma: $601 \times 343 = 206143 \equiv 143 \pmod{1000}$

Oxirgi uchta raqami 143 ekan.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda, Eyler funksiyasi, Eyler teoremasi va Ferma kichik teoremasi sonlar nazariyasining muhim tarkibiy qismlari hisoblanadi. Ushbu tushunchalarni o'rganish orqali sonlarning xossalarini chuqurroq anglash, murakkab taqqoslamalarni yechish hamda katta darajali sonlarning berilgan moduli bo'yicha qoldiqlarni aniqlash imkoniyatini yaratadi. Maqolada ko'rib chiqilgan nazariy ma'lumotlar va misollar Eyler funksiyasining xossalarini tushunish, teoremlarni amaliy masalalarda qo'llash hamda hisoblash jarayonlarini soddalashtirish muhim ahamiyatga ega. Shuningdek, ushbu teoremlar kriptografiya va axborot xavfsizligi kabi zamonaviy sohalarda ham qo'llash bilan ahamiyatlidir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Shodmonov Sh, Xudoyberdiyev G. Chiziqli algebra va analitik geometriya. – Toshkent: Fan nashriyoti, 2016.
2. Xodjayev D, Abdullayev A. Oliy matematika(1-qism). – Toshkent: O'qituvchi, 2008.
3. Sodiqov S, Rahmonov R. Oliy matematika asoslari. – Toshkent: O'zbekiston Milliy Universiteti nashriyoti, 2012.
4. Jo'rayev M. Chiziqli algebra kursi. – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2015.
5. Karimov N. Analitik geometriya va chiziqli algebra. – Toshkent: O'qituvchi 2010.
6. Tursunov T. Oliy algebra elementlari. – Toshkent: Yangi asr avlodi, 2013

7. Abdullayev B. Matematika(chiziqli algebra bo'limi). – Toshkent: Tafakkur 2011.
8. Ayupov A, Xudoyberdiyev X, Haydarov H. Algebra sonlar nazariyasi. – Toshkent: Tafakkur – bo'stoni, 2019.
9. Allakov I. Sonlar nazariyasidan misol va masalalar. – Toshkent: Ilm nuri, 2020.
10. Ismoilov Sh. Sonlar nazariyasi. – 2008.
11. Eyler integrallari va ularning amaliy tatbiqlari O Pulatov, Science and Education, OOO «Open science» 2026