Parametr qatnashgan tengsizliklarda yechimlar to‘plamini aniqlashning metodik yondashuvlari va bosqichma-bosqich algoritmi

Sitora Rustamovna Meliyeva
sitorameliyeva099@gmail.com
Jizzax davlat pedagogika universiteti

Annotatsiya: Maqolada parametr qatnashgan tengsizliklarda yechimlar to‘plamini parametr qiymatlariga bog‘liq holda aniqlash masalasi o‘rganiladi. Parametrning maxsus va kritik qiymatlarini ajratish, tengsizlikni holatlarga bo‘lib tahlil qilish hamda mos metodni tanlashga alohida e’tibor qaratiladi. Chiziqli, kvadrat, ratsional va modulli tengsizliklar misolida bosqichma-bosqich metodik algoritm taklif etiladi.

Kalit so‘zlar: parametrli tengsizlik, yechimlar to‘plami, kritik qiymat, oraliqlar usuli, diskriminant, metodik algoritm

Methodological approaches and a step-by-step algorithm for determining the solution set in inequalities involving parameters

Sitora Rustamovna Meliyeva
sitoramelieva099@gmail.com
Jizzakh State Pedagogical University

Abstract: The article studies the determination of the solution set of inequalities with parameters depending on parameter values. Special attention is paid to identifying special and critical parameter values, analyzing cases, and choosing an appropriate solution method. A step-by-step methodological algorithm is proposed using linear, quadratic, rational, and modular inequalities as examples.

Keywords: inequality with parameter, solution set, critical value, interval method, discriminant, methodological algorithm.

Kirish

Parametr qatnashgan tengsizliklar algebra kursining muhim va murakkab mavzularidan biri bo‘lib, umumiy o‘rta ta’lim, akademik litsey hamda oliy ta’limga kirish imtihonlarida keng uchraydi. Bunday tengsizliklarda noma’lum miqdor bilan birga qiymati oldindan berilmagan parametr ham ishtirok etadi. Shu sababli yechim bitta ko'rinishda emas, balki parametrning turli qiymatlariga mos holda aniqlanadi.

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, o'quvchilar parametrli tengsizliklarni yechishda ko'pincha parametrni noma'lum bilan adashtirish, ishorasi noaniq ifodaga bo'lishda tengsizlik belgisini noto'g'ri o'zgartirish, maxsus qiymatlarni e'tibordan chetda qoldirish kabi xatolarga yo'l qo'yadilar. Bu esa yechimlar to'plamining to'liq aniqlanmasligiga olib keladi.

Mazkur maqolada parametr qatnashgan tengsizliklarni yechishda yechimlar to'plamini aniqlashning bosqichma-bosqich metodik algoritmini ishlab chiqish va uni amaliy misollar orqali asoslash maqsad qilingan. Shuningdek, parametrning kritik va maxsus qiymatlarini ajratish, yechimlarni holatlarga bo'lib tahlil qilish hamda o'quvchilarda uchraydigan tipik xatolarni bartaraf etish yo'llari yoritiladi.

Metodlar

Tadqiqotda parametrli tengsizliklarni yechishning bir-birini to'ldiruvchi oltita metodik yondashuvi nazariy tahlil va qiyoslash asosida o'rganildi. Quyida har bir yondashuvning mohiyati qisqacha bayon etiladi.

A) Analitik-algebraik metod. Bu yondashuvda tengsizlik avval standart ko'rinishga keltiriladi, ya'ni barcha hadlar bir tomonga o'tkazilib, ikkinchi tomonda nol qoldiriladi. Parametr vaqtincha o'zgarmas son sifatida qaraladi va tengsizlik turi aniqlanadi: chiziqli, kvadrat, ratsional, modulli, ildizli yoki ko'rsatkichli. So'ngra mos ifoda nolga tenglashtirilib kritik nuqtalar topiladi, parametrning bu nuqtalarga ta'siri bo'yicha holatlar ajratiladi va har bir holat uchun yechim alohida yoziladi.

B) Oraliqlar usuli. Kritik nuqtalar son o'qiga qo'yilib, o'q oraliqlarga bo'linadi va har bir oraliqda ifodaning ishorasi tekshiriladi. Parametr kritik nuqtalarning o'zaro tartibini o'zgartirganda, masalan, ikki ildiz o'rin almashganda yoki ustma-ust tushganda, alohida holatlar ajratiladi.

D) Diskriminant asosidagi metod. Kvadrat tengsizliklarda diskriminant $D = b^2 - 4ac$ hal qiluvchi rol o'ynaydi. $D < 0$, $D = 0$ va $D > 0$ holatlari alohida tahlil qilinadi; parabola tarmoqlarining yo'nalishi va ildizlar mavjudligiga qarab yechimlar to'plami aniqlanadi. Parametr diskriminant ichida qatnashganda, uning qiymati yechimlar tabiatini tubdan o'zgartiradi.

E) Grafik metod. Tengsizlik funksiyalar grafiklari orqali talqin qilinadi. Grafikning abssissa o'qi bilan kesishish nuqtalari, parametr o'zgarganda grafikning siljishi yoki cho'zilishi ko'rgazmali tarzda kuzatiladi. Bu yondashuv o'quvchida geometrik tasavvurni mustahkamlaydi.

F) Modulli va ratsional tengsizliklarga xos yondashuvlar. Modulli tengsizliklar modul ta'rifidan foydalanib holatlarga ajratiladi yoki masofa sifatida geometrik talqin qilinadi. Ratsional tengsizliklarda esa avval aniqlanish sohasi topiladi, maxrajni nolga aylantiruvchi qiymatlar chiqarib tashlanadi va surat hamda maxrajning ishoralari birgalikda tahlil etiladi.

Sanab o‘tilgan yondashuvlar umumlashtirilib, parametrli tengsizliklarni yechishning yagona metodik algoritmi quyidagi yetti qadamda ifodalanadi:

1-qadam. Tengsizlik turini aniqlash.

2-qadam. Aniqlanish sohasini topish.

3-qadam. Kritik nuqtalarni aniqlash.

4-qadam. Parametrning maxsus qiymatlarini ajratish.

5-qadam. Har bir parametr oralig‘i uchun tengsizlikni yechish.

6-qadam. Yechimlar to‘plamini matematik to‘g‘ri shaklda yozish.

7-qadam. Natijani son o‘qi yoki grafik orqali tekshirish.

Natijalar

Taklif etilgan algoritmning ishlash mexanizmi to‘rtta turdagi parametrli tengsizlik misolida sinovdan o‘tkazildi. Har bir misol bir xil tartibda - shartni qo‘yish, turini aniqlash, aniqlanish sohasi, kritik nuqtalar, holatlarga ajratish, har bir holat yechimi va yakuniy javob - bayon etiladi.

1-misol (chiziqli parametrli tengsizlik). Tengsizlikni a parametrning barcha qiymatlari uchun yeching:

$$ax < 3.$$

Tengsizlik x ga nisbatan chiziqli. Aniqlanish sohasi $x \in \mathbb{R}$ - butun sonlar o‘qi. Kritik nuqta tenglikdan topiladi: $ax = 3$. Bu yerda maxsus qiymat $a = 0$, chunki aynan shu qiymatda noma‘lum oldidagi koeffitsiyent yo‘qoladi. Demak, uchta holat ajratiladi.

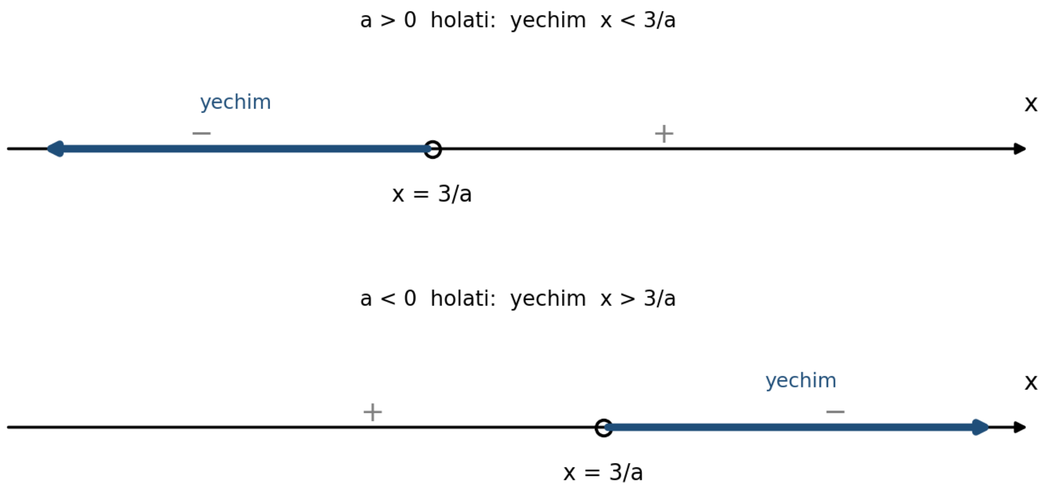
1-holat: $a > 0$. Tengsizlikning ikkala tomonini musbat songa bo‘lganda belgi o‘zgarmaydi: $x < \frac{3}{a}$. Yechim - $\left(-\infty; \frac{3}{a}\right)$.

2-holat: $a = 0$. Tengsizlik $0 \cdot x < 3$ ko‘rinishini oladi, ya‘ni $0 < 3$ - bu istalgan x da to‘g‘ri. Yechim - $x \in \mathbb{R}$.

3-holat: $a < 0$. Manfiy songa bo‘lishda tengsizlik belgisi qarama-qarshisiga o‘zgaradi: $x > \frac{3}{a}$. Yechim - $\left(\frac{3}{a}; +\infty\right)$.

Yakuniy javob: agar $a > 0$, $x \in \left(-\infty; \frac{3}{a}\right)$; agar $a = 0$, $x \in \mathbb{R}$; agar $a < 0$, $x \in \left(\frac{3}{a}; +\infty\right)$.

Metodik izoh. Bu misol o‘quvchida tengsizlikni harfiy ifodaga bo‘lishda ishora nazoratini va koeffitsiyentni nolga aylantiruvchi maxsus qiymatni ajratish ko‘nikmasini shakllantiradi.



1-rasm. Chiziqli parametrli tengsizlikda yechimlar to‘plamining parametr ishorasiga qarab son o‘qida tasviri.

1-rasmda ko‘rinib turibdiki, kritik nuqta o‘zgarmasdan joyida qolsa-da, parametrning ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgarganda yechim nuri qarama-qarshi yo‘nalishga buriladi.

2-misol (kvadrat parametrli tengsizlik). Tengsizlikni *a* parametrga qarab yeching:

$$x^2 - 2x + a \leq 0.$$

Tengsizlik kvadrat, bosh koeffitsiyent $1 > 0$, demak parabola tarmoqlari yuqoriga yo‘nalgan. Aniqlanish sohasi - butun ℝ. Diskriminant: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4 - 4a$. Diskriminant ishorasi parametrga bog‘liq, shuning uchun uch holat ajratiladi.

1-holat: $D < 0$, ya‘ni $4 - 4a < 0$, bundan $a > 1$. Parabola butunlay abssissa o‘qidan yuqorida, $x^2 - 2x + a > 0$ har doim. Demak, ≤ 0 tengsizlik bajarilmaydi - yechim $x \in \emptyset$.

2-holat: $D = 0$, ya‘ni $a = 1$. Bu holda $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Tengsizlik $(x - 1)^2 \leq 0$ faqat bitta nuqtada bajariladi: $x = 1$. Yechim - $\{1\}$.

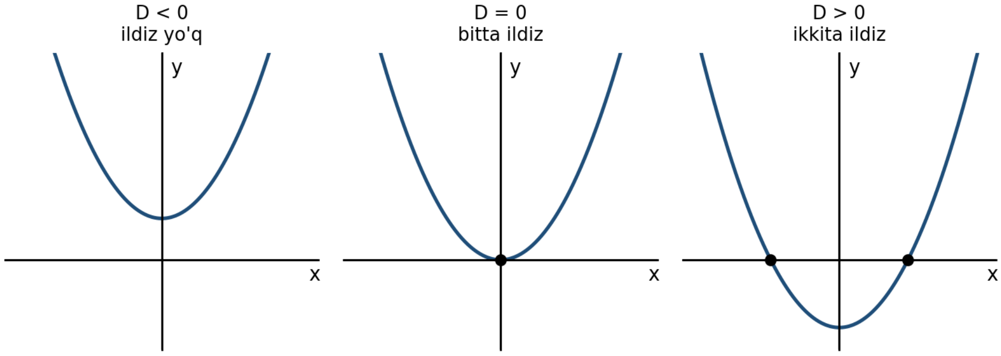
3-holat: $D > 0$, ya‘ni $a < 1$. Kvadrat tenglama ildizlari:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - a}.$$

Parabola tarmoqlari yuqoriga yo‘nalgani uchun ≤ 0 tengsizlik ildizlar orasidagi kesmada bajariladi. Yechim - $x \in \left[1 - \sqrt{1 - a}; 1 + \sqrt{1 - a}\right]$.

Yakuniy javob: agar $a > 1$, yechim $\emptyset$; agar $a = 1$, yechim $\{1\}$; agar $a < 1$, $x \in \left[1 - \sqrt{1 - a}; 1 + \sqrt{1 - a}\right]$.

Metodik izoh. Misol o‘quvchida diskriminantning uchala holatini to‘liq ajratish va parabola yo‘nalishiga tayanib yechimni o‘qish ko‘nikmasini mustahkamlaydi.



2-rasm. Kvadrat parametrli tengsizlikda diskriminantning uch holati va parabolaning abssissa o'qi bilan munosabati.

2-rasm uch holatni ko'rgazmali umumlashtiradi: diskriminant manfiy bo'lganda parabola o'qni kesmaydi, nolga teng bo'lganda unga urinadi, musbat bo'lganda esa ikki nuqtada kesadi.

3-misol (ratsional parametrli tengsizlik). Tengsizlikni a parametrga qarab yeching:

$$\frac{x - a}{x - 2} > 0.$$

Tengsizlik ratsional. Aniqlanish sohasi maxrajdan topiladi: $x - 2 \neq 0$, ya'ni $x \neq 2$. Kritik nuqtalar - suratni nolga aylantiruvchi $x = a$ va maxrajni nolga aylantiruvchi $x = 2$. Bu nuqtalarning son o'qidagi tartibi a ning 2 ga nisbatiga bog'liq, shuning uchun uch holat ajratiladi.

1-holat: $a < 2$. Kritik nuqtalar tartibi $a < 2$. Oraliqlar usuliga ko'ra kasr chetki oraliqlarda musbat bo'ladi: yechim - $x \in (-\infty; a) \cup (2; +\infty)$.

2-holat: $a = 2$. Tengsizlik $\frac{x-2}{x-2} > 0$ ko'rinishini oladi, bu $x \neq 2$ da $1 > 0$ - doimo to'g'ri. Yechim - $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

3-holat: $a > 2$. Kritik nuqtalar tartibi $2 < a$. Kasr yana chetki oraliqlarda musbat: yechim - $x \in (-\infty; 2) \cup (a; +\infty)$.

Yakuniy javob: agar $a < 2$, $x \in (-\infty; a) \cup (2; +\infty)$; agar $a = 2$, $x \neq 2$; agar $a > 2$, $x \in (-\infty; 2) \cup (a; +\infty)$.

Metodik izoh. Misol o'quvchida aniqlanish sohasini nazorat qilish, maxraj nolini yechimdan chiqarib tashlash va kritik nuqtalar tartibi o'zgarganda holatlarni qayta ajratish ko'nikmasini shakllantiradi.

4-misol (modul qatnashgan parametrli tengsizlik). Tengsizlikni a parametrga qarab yeching:

$$|x - 1| < a.$$

Modul nomanfiy kattalik bo'lgani uchun chap tomon hech qachon manfiy bo'lmaydi. Shu sababli yechimning mavjudligi a ning ishorasiga bog'liq - ikki holat ajratiladi.

1-holat: $a \leq 0$. Nomanfiy ifoda musbat bo'lmagan sondan qat'iy kichik bo'la olmaydi. Yechim - $x \in \emptyset$.

2-holat: $a > 0$. Modul ta'rifiga ko'ra $|x - 1| < a$ ikki tomonlama tengsizlikka teng kuchli: $-a < x - 1 < a$. Barcha qismlarga 1 qo'shamiz: $1 - a < x < 1 + a$. Yechim - $x \in (1 - a; 1 + a)$.

Yakuniy javob: agar $a \leq 0$, yechim $\emptyset$; agar $a > 0$, $x \in (1 - a; 1 + a)$.

Metodik izoh. Geometrik talqinda $|x - 1|$ - x nuqtaning 1 dan masofasi; tengsizlik shu masofa a dan kichik bo'lgan nuqtalarni izlaydi. Misol o'quvchida modulning nomanfiyligini hisobga olish va parametr ishorasiga qarab yechim mavjudligini baholash ko'nikmasini shakllantiradi.

Jadval 1.

Parametrli tengsizliklarni yechishda metod tanlash mezonlari.

Tengsizlik turi	Asosiy metod	E'tibor beriladigan jihat	O'quvchilar ko'p qiladigan xato	Tavsiya etiladigan metodik yondashuv
Chiziqli	Analitik-algebraik metod	Koeffitsiyentni nolga aylantiruvchi qiymat	Maxsus qiymat a = 0 ni unutish	Uch holatni (a > 0, a = 0, a < 0) majburiy ajratish
Kvadrat	Diskriminant metodi, grafik metod	Diskriminant ishorasi va parabola yo'nalishi	D ning uchala holatini to'liq tahlil qilmaslik	D < 0, D = 0, D > 0 holatlarini grafik bilan tasdiqlash
Ratsional	Oraliqlar usuli	Aniqlanish sohasi va maxraj noli	Maxraj nolini yechimga kiritib yuborish	Kritik nuqtalar tartibini parametrga qarab qayta tekshirish
Modulli	Modul ta'rifi, geometrik talqin	Modulning nomanfiyligi	Parametr manfiy bo'lganda ham yechim izlash	Avval yechim mavjudligini, so'ng oraliqni aniqlash

Jadval 1 metodik yondashuvni tengsizlik turiga moslab tanlashga yordam beradi. Undan ko'rinadiki, har bir turning o'ziga xos "xavf nuqtasi" bor: chiziqli tengsizlikda - maxsus qiymat, kvadratda - diskriminant holatlari, ratsionalda - aniqlanish sohasi, modullida - ifodaning nomanfiyligi. Yondashuvni shu xavf nuqtasiga qarab tanlash xatolar sonini sezilarli kamaytiradi.

Muhokama

Tadqiqot natijalari parametrli tengsizliklarni o'qitishda bosqichma-bosqichlik tamoyilining hal qiluvchi ahamiyatini ko'rsatadi. O'quvchi avval parametrsiz oddiy chiziqli tengsizliklarni ishonchli yechadigan bo'lishi, so'ngra chiziqli parametrli, undan keyin kvadrat, ratsional va nihoyat modulli tengsizliklarga o'tishi maqsadga muvofiq. Har bir yangi bosqich avvalgisining ustiga quriladi: chiziqli misolda shakllangan "ishora nazorati" ko'nikmasi kvadrat va ratsional misollarda ham bevosita ishlaydi.

To'plangan tahlil o'quvchilar yo'l qo'yadigan beshta tipik xatoni aniqlashga imkon berdi:

a) parametrning maxsus qiymatini, masalan, $a = 0$ ni, e'tibordan chiqarib qoldirish;

b) tengsizlikni manfiy songa bo'lganda belgini o'zgartirmaslik;

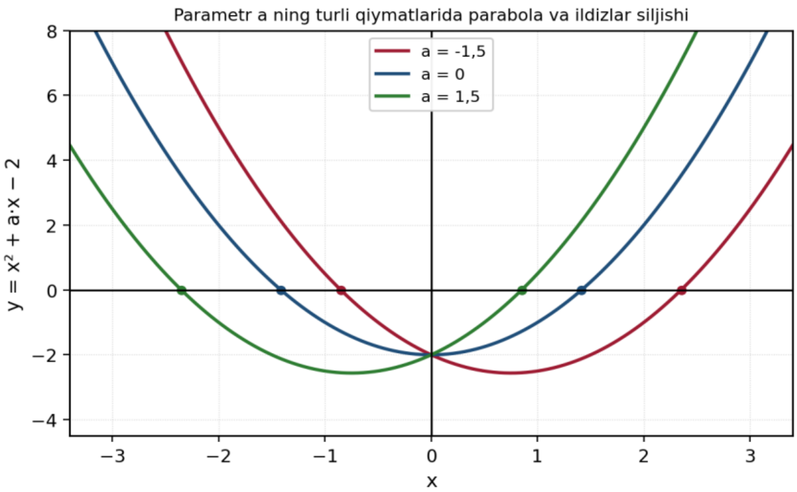
d) ratsional tengsizlikda maxrajni nolga aylantiruvchi qiymatni yechimdan chiqarib tashlamaslik;

e) diskriminantning barcha holatlarini to'liq ko'rib chiqmaslik;

f) yechimlar to'plamini noto'g'ri oraliq shaklida - ochiq va yopiq chegaralarni almashtirib - yozish.

Bu xatolarning aksariyati bitta umumiy sababga - holatlarga ajratish bosqichining yetarli o'zlashtirilmaganligiga - borib taqaladi. Shu bois algoritmda to'rtinchi qadam, ya'ni parametrning maxsus qiymatlarini ajratish, alohida urg'u bilan ajratilgan.

Grafik va algebraik metodlarni birgalikda qo'llash alohida samara beradi. 4-rasmda $y = x^2 + ax - 2$ funksiyasining parametr *a* ning uch qiymatidagi grafiklari bitta koordinatalar sistemasida keltirilgan. Algebraik yo'l bilan olingan natija - ildizlarning siljishi - grafikda ko'zga ko'rinadigan bo'ladi: parametr o'zgarganda parabola shaklini saqlaydi, lekin uchi va ildizlari yon tomonga suriladi.



4-rasm. Parametr a ning turli qiymatlarida funksiya grafigining va uning abssissa o'qi bilan kesishish nuqtalarining siljishi.

O'qituvchining metodik vazifasi - o'quvchini tayyor formula yodlashga emas, balki holatlar tahliliga o'rgatishdir. Parametrli tengsizlikning yechimi yagona ifoda emas, balki shartlarga bo'lingan tizimli javobdir; shuning uchun o'quv jarayonida "javobni yozib bo'lgach, parametrning yana qaysidir qiymati e'tibordan chetda qolmadimi?" degan o'z-o'zini tekshirish odati shakllantirilishi lozim. Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundaki, taklif etilgan algoritm va metod tanlash jadvali darslik mashqlari hamda imtihonga tayyorlov mashg'ulotlariga o'zgartirishsiz tatbiq etilishi mumkin.

Xulosa

Tadqiqotda parametrli tengsizliklarda yechimlar to'plamini aniqlashning bosqichma-bosqich metodik algoritmi ishlab chiqildi. Algoritm chiziqli, kvadrat, ratsional va modulli tengsizliklar misolida asoslandi. Unda parametrning maxsus va kritik qiymatlarini ajratish, tengsizlikni holatlarga boʻlib tahlil qilish hamda yechimlar toʻplamini toʻgʻri yozish asosiy bosqich sifatida belgilandi.

Taklif etilgan algoritm oʻquvchilarda parametrli tengsizliklarni tartibli yechish koʻnikmasini shakllantirishga, tipik xatolarni kamaytirishga xizmat qiladi. Oʻqituvchilar uchun esa metod tanlash mezonlari va xatolar tahlili amaliy metodik tavsiya sifatida foydalanilishi mumkin.

Kelgusida ushbu algoritmni koʻrsatkichli, logarifmik va ikki parametrli tengsizliklarga tatbiq etish maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Polya G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. — Princeton: Princeton University Press, 2004. — 288 p.

2. Schoenfeld A. H. Mathematical Problem Solving. — Orlando: Academic Press, 1985. — 409 p.

3. Krutetskii V. A. The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. — Chicago: University of Chicago Press, 1976. — 417 p.

4. Сканави М. И. (ред.). Сборник задач по математике для поступающих в вузы. — Москва: ОНИКС, 2013. — 608 с.

5. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. — Москва: Илекса, 2005. — 328 с.

6. Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами. — Минск: Асар, 2004. — 464 с.

7. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. — Москва: Просвещение, 1989. — 252 с.

8. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. — Москва: Мнемозина, 2013. — 400 с.

9. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. — Москва: Просвещение, 2018. — 384 с.

10. Далингер В. А. Методика обучения учащихся решению задач с параметрами. — Омск: Изд-во ОмГПУ, 2012. — 158 с.