

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalalar

Muattar Ilhom-qizi Qodirova
Yulduz Shovkat-qizi Rovshanova
Ilmiy rahbar: Feruza Jo'rayeva
Shahrisabz davlat pedagogika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalalar nazariy jihatdan o'rganilgan. Koshi masalasidan farqli o'laroq, chegaraviy masalalar berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi integral chiziq topish bilan bog'liqdir. Maqolada bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalalar, ularning yechimga egaligi, yagonaligi va mavjudligi shartlari batafsil yoritilgan. Bundan tashqari, Kroneker-Kapelli teoremasiga asoslanib, chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi uchun zarur va yetarli shartlar keltirilgan. Maqolada mavzuning nazariy asoslari 2.15.1-teorema va 2.15.2-teorema orqali isbotlangan. Hamda 2.15.1-misol yordamida nazariy bilimlar amaliy jihatdan mustahkamlangan. Yuqorida keltirilgan natijalar differensial tenglamalar nazariyasida muhim o'rin tutadi va amaliy masalalarni yechishda keng qo'llaniladi.

Kalit so'zlar: ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama, chegaraviy masala, Koshi masalasi, bir jinsli chegaraviy shartlar, Vronskiy determinanti, Kroneker-Kapelli teoremasi, yechimning yagonaligi, yechimning mavjudligi, chiziqli bog'lanmagan yechimlar, xususiy yechim, umumiy yechim

Boundary Problems for Second-Order Linear Differential Equations

Muattar Ilhom-kizi Kadirova
Yulduz Shovkat-kizi Rovshanova
Scientific Supervisor: Feruza Jo'rayeva
Shakhrisabz State Pedagogical Institute

Abstract: In this article, boundary problems for second-order linear differential equations are theoretically studied. Unlike the Cauchy problem, boundary problems are related to finding an integral line passing through two given points. The article covers homogeneous and inhomogeneous boundary problems, their solution, uniqueness, and existence conditions in detail. In addition, based on the Kronecker-Capelli theorem, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to

boundary problems are presented. The theoretical foundations of the topic are proven in the article by Theorem 2.15.1 and Theorem 2.15.2. Also, theoretical knowledge is practically strengthened using Example 2.15.1. The above results play an important role in the theory of differential equations and are widely used in solving practical problems.

Keywords: second-order linear differential equation, boundary value problem, Cauchy problem, homogeneous boundary conditions, Wronsky determinant, Kronecker-Capelli theorem, uniqueness of solution, existence of solution, linearly independent solutions, particular solution, general solution

Kirish

Differensial tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasi, shu tenglamaning berilgan nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini topishdan iborat edi. Klassik fizikaning va tatbiqiy matematikaning bir qator masalalari differensial tenglamaning berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini topish masalasiga keltiriladi. Bu masala Koshi masalasidan tubdan farq qiladi. Chunki berilgan ikki nuqtaning har biri uchun alohida qo'yilgan Koshi masalalari yechimga ega bo'lsa ham, yuqoridagi masala yechimga ega bo'lishi yoki bo'lmasligi ham mumkin. Odatda bunday turdagi masalaga differensial tenglama uchun ikki nuqtali chegaraviy masala deb ataladi.

Chegaraviy masalalar fizika, mexanika, iqtisodiyot va muhandislik masalalarida keng qo'llaniladi. Masalan, simning deformatsiyasi, issiqlik tarqalishi, elektromagnit to'lqinlar kabi ko'plab fizik hodisalar aynan chegaraviy masalalar orqali modellanadi. Shu sababdan, ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalalarni o'rganish nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi.

Asosiy qism

Bundan buyon ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), x \in [0, l] \quad (2.15.1)$$

qo'yilgan ushbu

$$\begin{cases} l_1(y) \equiv \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = y_0 \\ l_2(y) \equiv \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = y_1 \end{cases} \quad (2.15.2)$$

ko'rinishdagi chegaraviy masalani qaraymiz. Bu yerda $p_1(x), p_2(x), f(x), x \in [0, 1]$ - berilgan uzluksiz funksiyalar bo'lib, $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, y_0, y_1$ ushbu $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$ shartni qanoatlantiruvchi berilgan haqiqiy sonlar. Bundan tashqari:

$$y(0) = y(+0), y'(0) = y'(+0), y(l) = y(l-0), y'(l) = y'(l-0).$$

Agar $y_0 = y_1 = 0$, ya'ni $l_1(y) = 0, l_2(y) = 0$ bo'lsa, unga bir jinsli chegaraviy shartlar deyiladi. (2.15.1), (2.15.2) ko'rinishdagi masalaga bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala deb ataladi. Ushbu

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, x \in [0, l] \quad (2.15.3)$$

$$l_1(y) = 0, l_2(y) = 0 \quad (2.15.4)$$

ko‘rinishdagi masalaga esa bir jinsli chegaraviy masala deyiladi.

2.15.1-teorema. Aytaylik, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2.15.3) tenglamaning ixtiyoriy chiziqli bog‘lanmagan yechimlari bo‘lsin. U holda (2.15.3), (2.15.4) bir jinsli chegaraviy masala faqat nol yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1(y_1) & l_1(y_2) \\ l_2(y_1) & l_2(y_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Ma‘lumki, (2.15.3) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.15.5)$$

ko‘rinishga ega. Bunda c_1, c_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. (2.15.5) va (2.15.4) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$\begin{cases} c_1 l_1(y_1) + c_2 l_1(y_2) = 0 \\ c_1 l_2(y_1) + c_2 l_2(y_2) = 0 \end{cases} \quad (2.15.6)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema faqat $c_1 = c_2 = 0$ nol yechimga ega bo‘lishi uchun $\Delta \neq 0$ bo‘lishi zarur va yetarli. ■

2.15.1-natija. (2.15.3), (2.15.4) bir jinsli chegaraviy masala cheksiz ko‘p nolmas yechimga ega bo‘lishi uchun $\Delta = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

2.15.1-misol. Ushbu

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$l_1(y) = y(0) = 0, l_2(y) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

chegaraviy masalani qaraylik. Ko‘rinib turibdiki, quyidagi

$$y_1(x) = e^{-x} \cos 2x, y_2(x) = e^{-x} \sin 2x$$

funksiyalar berilgan $y'' + 2y' + 5y = 0$ tenglamaning chiziqli bog‘lanmagan yechimlaridan iborat. Chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\frac{\pi}{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini aniqlaymiz. Bu esa berilgan chegaraviy masala cheksiz ko‘p $y(x) = c_2 e^{-x} \sin 2x$ ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lishini ko‘rsatadi. Bunda c_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy masala

Faraz qilaylik, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2.15.3) bir jinsli tenglamaning chiziqli bog‘lanmagan yechimlari bo‘lib, $z(x)$ funksiya esa (2.15.1) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning biror xususiy yechimi bo‘lsin. U holda (2.15.1) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + z(x) \quad (2.15.7)$$

ko‘rinishda bo‘lishi ma‘lum. Bunda c_1, c_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. Bu (2.15.7) ko‘rinishdagi yechimni (2.15.2) bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy shartlarga qo‘yib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} c_1 l_1(y_1) + c_2 l_1(y_2) = y_0 - l_1(z) \\ c_1 l_2(y_1) + c_2 l_2(y_2) = y_1 - l_2(z) \end{cases} \quad (2.15.8)$$

Bu sistemani yozib olamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1(y_1) & l_1(y_2) \\ l_2(y_1) & l_2(y_2) \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} l_1(y_1) & l_1(y_2) \\ l_2(y_1) & l_2(y_2) \end{vmatrix}$$

(2.15.8) algebraik tenglamalar sistemasining yechimga egaligi haqidagi Kroneker - Kapelli teoremasidan quyidagi tasdiqning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

2.15.2-teorema. 1) Agar $\Delta = \det A \neq 0$ bo'lsa, u holda (2.15.1), (2.15.2) chegaraviy masalaning $[0, l]$ oraliqda aniqlangan yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

2) Agar $\Delta = \det A = 0$ bo'lib, $\text{rang } A \neq \text{rang } B$ bo'lsa, u holda (2.15.1), (2.15.2) chegaraviy masala yechimga ega bo'lmaydi.

3) Agar $\Delta = \det A = 0$ bo'lib, $\text{rang } A = \text{rang } B$ bo'lsa, u holda (2.15.1), (2.15.2) chegaraviy masalaning yechimi mavjud, lekin yagona bo'lmaydi.

2.15.2-natija. (2.15.1), (2.15.2) bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala yagona yechimga ega bo'lishi uchun (2.15.3), (2.15.4) bir jinsli chegaraviy masala faqat nol yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Xulosa

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalalar Koshi masalasidan tubdan farq qiladi. Koshi masalasida boshlang'ich shartlar bitta nuqtada berilsa, chegaraviy masalalarda shartlar ikki turli nuqtada - ko'pincha oraliqning uchlarida beriladi. Bu farq yechimning mavjudligi va yagonaligi xossalarida ham namoyon bo'ladi.

Maqolada isbotlangan 2.15.1-teorema asosida bir jinsli chegaraviy masalaning faqat nol yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta \neq 0$ sharti zarur va yetarli ekanligi ko'rsatildi. 2.15.2-teorema esa bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalaning yechimga egaligi va yagonaligi uchun uch xil holni o'z ichiga oladi. Ushbu natijalar Kroneker-Kapelli teoremasiga asoslanadi.

2.15.1-misol yordamida nazariy xulosa amaliy tarzda tasdiqlandi: $\Delta = 0$ bo'lgan holda masala cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi ko'rsatildi. Ushbu natijalar differensial tenglamalar nazariyasida fundamental o'rin tutadi va fizika, mexanika, muhandislik masalalarini yechishda muhim vosita bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Hasanov A.B. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. — Toshkent, 2020. — 325 b.
2. Jo'rayev T.J. va boshqalar. Oliy matematika kursi. 2-qism: Differensial tenglamalar. Toshkent, "O'zbekiston", 1994.
3. Qurbonov O.K. Differensial tenglamalardan misol va masalalar to'plami. Toshkent, "Universitet", 2012.

4. Salohiddinov M.S. Differensial tenglamalar. Toshkent, "Yangi asr avlodi", 2005. – 448 b.
5. Toshmetov O'.N., Turgunbayev R.M. Oddiy differensial tenglamalar. Toshkent, "O'zbekiston", 2001.