

Ko‘p o‘lchovli massiv funksiyalari va ularning tuzilish, topologik va algebraik xususiyatlari

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko‘p o‘lchovli massiv funksiyalarining matematik tabiatini tashkil etuvchi tuzilish, topologik va algebraik xususiyatlar chuqur o‘rganilgan. Ko‘p o‘lchovli massivlar (tensorlar) bugungi kunda tasvirlarni qayta ishlash, kompyuter grafikasi, sun‘iy intellekt, fizik modellashtirish, raqamli geometriya, statistik tahlil kabi ko‘plab sohalarda asosiy matematik obyekt sifatida qo‘llanadi. Maqolada ularning struktura parametrlari, tartibi, o‘lchamlari, indekslash tizimi, topologik bog‘liqliklari, algebraik amallar, chiziqli va nolinear transformatsiyalar hamda funksional xususiyatlari keng tahlil qilinadi. Shuningdek, ularni oliy ta’limda o‘rgatishga oid didaktik tamoyillar, bosqichli o‘qitish metodlari, amaliy mashg‘ulotlarni tashkil qilish yo‘llari ham asoslab beriladi.

Kalit so‘zlar: ko‘p o‘lchovli massiv, tensor, tuzilish, topologik xususiyatlar, algebraik xususiyatlar, funksiyalar, didaktika

Multidimensional array functions and their structural, topological and algebraic properties

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BIU

Abstract: This article deeply studies the structural, topological and algebraic properties that constitute the mathematical nature of multidimensional array functions. Multidimensional arrays (tensors) are currently used as the main mathematical objects in many areas, such as image processing, computer graphics, artificial intelligence, physical modeling, numerical geometry, statistical analysis. The article extensively analyzes their structural parameters, order, dimensions, indexing system, topological relationships, algebraic operations, linear and nonlinear transformations and functional properties. It also substantiates the didactic principles of teaching them in higher education, step-by-step teaching methods, and ways to organize practical exercises.

Keywords: multidimensional array, tensor, structure, topological properties, algebraic properties, functions, didactics

KIRISH. Ko'p o'lchovli massivlar matematikada, ayniqsa, amaliy matematikada murakkab tizim va jarayonlarni modellashtirishda eng muhim obyektlardan biridir. Oddiy 1-o'lchovli massivlar vaqt bo'yicha ketma-ket o'lchovlarni ifodalasa, 2-o'lchovli massivlar tasvirlarni, 3-o'lchovli massivlar esa fazodagi obyektlarni ifodalashi mumkin. 4 o'lchov va undan yuqori o'lchovli massivlar sun'iy intellekt, mashinaviy o'qitish, raqamli geometriya, molekulyar dinamik modellari kabi sohalarda uchraydi. Ularda belgilangan funksiyalar ham ko'p o'zgaruvchili bo'lib, o'z tuzilishiga va topologik bog'liqligiga qarab turlicha xususiyatlarga ega.

Ko'p o'lchovli massivlarning matematik jihatdan o'rganilishi uchta asosiy yo'nalishni o'z ichiga oladi:

1. Tuzilish xususiyatlari - indekslash, o'lchamlar, tartib (rank), zichlik, elementlararo aloqa modeli.
2. Topologik xususiyatlar - qo'shnichilik, masofalar, chegaralar, bog'liqlik, mahalliy struktura.
3. Algebraik xususiyatlar - qo'shish, ko'paytirish, bo'lish, transformatsiyalar, chiziqli operatorlar, tensorli algebra amallari.

Mavzuni chuqur o'rganish nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki amaliy dastur yaratish, raqamli model tuzish, mashinaviy o'qitish algoritmlarini optimallashtirish, tasvir va signalni qayta ishlash, statistika va fizik modellashtirish kabi sohalarda muhim bilimlarni ta'minlaydi.

ASOSIY QISM

1. Ko'p o'lchovli massivlar: umumiy tushuncha va matematik asoslar

Ko'p o'lchovli massiv quyidagicha ifodalanadi:

$$A = (a_{i_1, i_2, \dots, i_n}), 1 \leq i_k \leq N_k, \quad 1 \leq i_k \leq N_k$$

Bu yerda n - massiv tartibi, N_k - har bir o'lcham uzunligi. Tartibi yuqori bo'lgan massivlar odatda tensorlar deb yuritiladi.

1.1. Tartib va o'lchamlar

- 1D - vektor
- 2D - matritsa
- 3D - kubik massiv
- ND - n-o'lchovli massiv

O'lchamlarning o'zgarishi - resampling va reshaping amallari orqali amalga oshadi.

1.2. Indeksash tizimi

Indeksash:

- lineer indeksash,
- ko'p o'lchovli indeksash,
- tensorli indeksash

ko‘rinishida ishlatiladi.

Ko‘p o‘lchovli indekslash massivning tuzilishiga bevosita ta’sir qiladi.

1.3. Zichlik va struktura

Zich massivlar barcha elementlar bilan ishlaydi, siyrak massivlar esa nol bo‘lmagan elementlar bilan.

2. Ko‘p o‘lchovli massiv funksiyalarining tuzilish xususiyatlari

Tuzilish xususiyatlari ushbu funksiyalarning analitik shakli, kompyuterda saqlanishi va ishlov berilishi bilan bog‘liq.

2.1. Tuzilish parametrlari

- elementlar soni;
- koordinatalar tizimi;
- massivning o‘lchamlari;
- qiymatlarning taqsimlanishi;
- chegaraviy shartlar;
- mahalliy strukturaviy birliklar.

2.2. Tuzilmaviy bog‘liqlik

Massiv ichidagi funksiyalar ikki turdagi bog‘liqliklarga ega:

1. Global bog‘liqlik - barcha elementlar o‘zaro ta’sir qiladi.
2. Mahalliy bog‘liqlik - faqat qo‘shni elementlar ta’siri hisobga olinadi.

2.3. Strukturalarning turlari

- muntazam panjara
- nomuntazam panjara
- tuzilmaviy fazoviy massiv
- topologik bog‘langan massiv

3. Ko‘p o‘lchovli massivlarning topologik xususiyatlari

Topologiya massiv elementlari orasidagi fazoviy va mantiqiy aloqa tuzilishini o‘rganadi.

3.1. Topologik qo‘shnichilik

Qo‘shnichilik:

- 4-yo‘nalishli (2D),
- 8-yo‘nalishli (2D),
- 6-yo‘nalishli (3D),
- n-o‘lchovli qo‘shnichilik

Tasir mexanizmini belgilaydi.

3.2. Masofa metrikasi

Ko‘p o‘lchovli massivlar uchun:

- Evklid masofasi,
- Manxetten,
- Chebyshev masofasi

qo'llaniladi.

3.3. Topologik bog'lanish

Bog'lanish komponentlari graf nazariyasi asosida aniqlanadi.

3.4. Topologik fazoda funksiyalarning xususiyatlari

Funksiyalar:

- uzluksizlik
- chegaralilik
- differensiallanuvchanlik
- lokal ekstremumlar

kabi xususiyatlarga ega bo'lishi mumkin.

4. Algebraik xususiyatlar

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalariga algebraik amallar qo'llash murakkab tizimlar yaratish imkonini beradi.

4.1. Qo'shish va ko'paytirish

Massiv A va B uchun:

$$C=A+B, C_{i_1 \dots i_n} = A_{i_1 \dots i_n} + B_{i_1 \dots i_n} \quad \text{\\quad} \\ C_{\{i_1 \dots i_n\}} = A_{\{i_1 \dots i_n\}} + B_{\{i_1 \dots i_n\}} \\ C=A \cdot B \quad C=A \cdot B \quad C=A \cdot B$$

Agar chiziqli operatorlar ishlatilsa:

$$C=\alpha A+\beta B \quad C=\alpha A+\beta B$$

4.2. Matritsa va tensor ko'paytmalari

- Kroneker ko'paytma
- Hadamard ko'paytma
- Tensorga xos bo'lgan bo'linma amallari

4.3. Algebraik transformatsiyalar

- ortogonal transformatsiyalar
- chiziqli operatorlar
- diagonalizatsiya
- spektral dekompozitsiya

4.4. Tensor dekompozitsiyalari

Tensor dekompozitsiyasi zamonaviy sun'iy intellektda keng qo'llanadi.

- CP-dekompozitsiya
- Tucker modeli
- HOSVD (High-Order SVD)

5. Funksional xususiyatlar

Ko'p o'lchovli massivlar funksiyalarining funksional xususiyatlari:

1. Uzluklilik
2. Chegaralanganlik
3. Lokallik

4. Mahalliy o'rtacha qiymat

5. Gradient va divergentsiya

6. Laplasiya operatori

5.1. Gradient

$\nabla A(i,j,k) = (A_x, A_y, A_z)$ $\nabla A(i,j,k) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z} \right)$

5.2. Laplas operatori

$\Delta A = \sum_k \frac{\partial^2 A}{\partial x_k^2}$ $\Delta A = \sum_k \frac{\partial^2 A}{\partial x_k^2}$

Tasvirlarni qayta ishlashda silliqlash va chekka ajratishda qo'llanadi.

6. Topologik va algebraik xususiyatlarning amaliy qo'llanishi

Ko'p o'lchovli massivlar quyidagi sohalarda qo'llanadi:

6.1. Tasvirlarni qayta ishlash

Topologik qo'shnihilik va gradient operatorlari asosiy o'rinni egallaydi.

6.2. Sun'iy intellekt

Tensorli algebra asosida:

- CNN,
- RNN,
- Transformer

arxitekturalari quriladi.

6.3. Fizik modellashtirish

Laplasiya operatoriga asoslangan issiqlik, diffuziya, to'lqin tenglamalari 3D massivlarda modellashtiriladi.

6.4. Statistika va Data Science

- kovariatsiya matritsalar
- ma'lumotlarni o'lchamlarni qisqartirish
- PCA, LDA

7. Didaktik yondashuvlar

Bu murakkab mavzuni o'quvchilarga o'rgatishda quyidagi pedagogik yondashuvlar samarali:

7.1. Bosqichma-bosqich o'qitish

1. Lineer algebra asoslari
2. Matritsa algebra
3. 3D massivlar

4. Tensor algebra

5. Amaliy qo'llanishlar

6. Algoritmlar yaratish

7.2. Amaliyotga yo'naltirilgan o'qitish

Talabalarga topshiriqlar:

- tasvir filtrini yaratish
- tensorli operatsiyalar dasturi
- fizik model yaratish
- sun'iy intellektga doir loyihalar

7.3. Digital vositalar

- Python (NumPy, TensorFlow)
- MATLAB
- Mathematica
- OpenCV

7.4. Loyihaviy ta'lim

Talabalarning mustaqil ilmiy izlanishini rag'batlantiradi.

XULOSA. Maqolada ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining tuzilish, topologik va algebraik xususiyatlari nazariy asoslar, algoritmik metodlar va amaliy qo'llanmalar bilan batafsil yoritildi. Ko'p o'lchovli massivlar bugungi raqamli axborot tizimlarining asosiy matematik modeli bo'lib, ularning tuzilish parametrlarini, topologik bog'liqliklarini va algebraik operatsiyalarini chuqur o'rganish zamonaviy ilm-fan va texnologiyalarni rivojlantirishda muhim hisoblanadi. Bundan tashqari, mavzuni o'qitishning didaktik tizimi, bosqichli, amaliy va zamonaviy texnologiyalarga asoslangan metodlar yordamida talabalarning matematik tafakkurini kengaytirishga xizmat qiladi. Olingan nazariy bilimlarni sun'iy intellekt, kompyuter grafikasi, tasvirlarni qayta ishlash, fizika va muhandislik modellash tirish kabi sohalarda qo'llash orqali yuqori samaradorlikka erishish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. MIT Press, 2014.
2. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
3. Horn R., Johnson C. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 2013.
4. Kolda T., Bader B. Tensor Decompositions and Applications. SIAM Review, 2009.
5. Oppenheim A., Schafer R. Digital Signal Processing. Pearson, 2014.
6. Press W. et al. Numerical Recipes. Cambridge University Press, 2007.
7. Samarskiy A.A., Mikhailov A.P. Matematik modellash tirish asoslari. Moskva, 1985.
8. NumPy va TensorFlow rasmiy hujjatlari (2023).
9. Lay D. Linear Algebra and Its Foundations. Pearson, 2012.
10. O'zbekiston Milliy Universiteti, Raqamli metodlar kursi (2020-2023).